مثال 1: المجال المغلق $I_0=[0,1]$ متراص:

البرهان: سنبرهن بطريقة نقض الفرض: نفرض جدلاً أنه غير متراص أي أن له تغطية مفتوحة (U_α) لا تحتوي على تغطية جزئية منتهية.

نقسم المجال من منتصفه نحصل على مجالين مغلقين $[\frac{1}{2},1]$ ، $[0,\frac{1}{2}]$.
إن أحد هذين المجالين على الأقل لا يغطى بعدد منته من تغطية المعطاة.
وإذا كان الإثنان لا يغطيان فنختار أحدهما وليكن الذي على اليمين ونسميه I_1
بعد ذلك نقسم المجال I_1 من منتصفه فنحصل على مجالين مغلقين أيضاً أحدهما لا يغطى بعدد منته وليكن الذي على اليمين ونسميه I_2 بنفس الطريقة نبني المجال I_n ونتابع هذه العملية إلى ما لا نهاية فنحصل على متتالية متناقصة (متداخلة) من المجالات المغلقة $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ التي أقطارها تسعى إلى الصفر

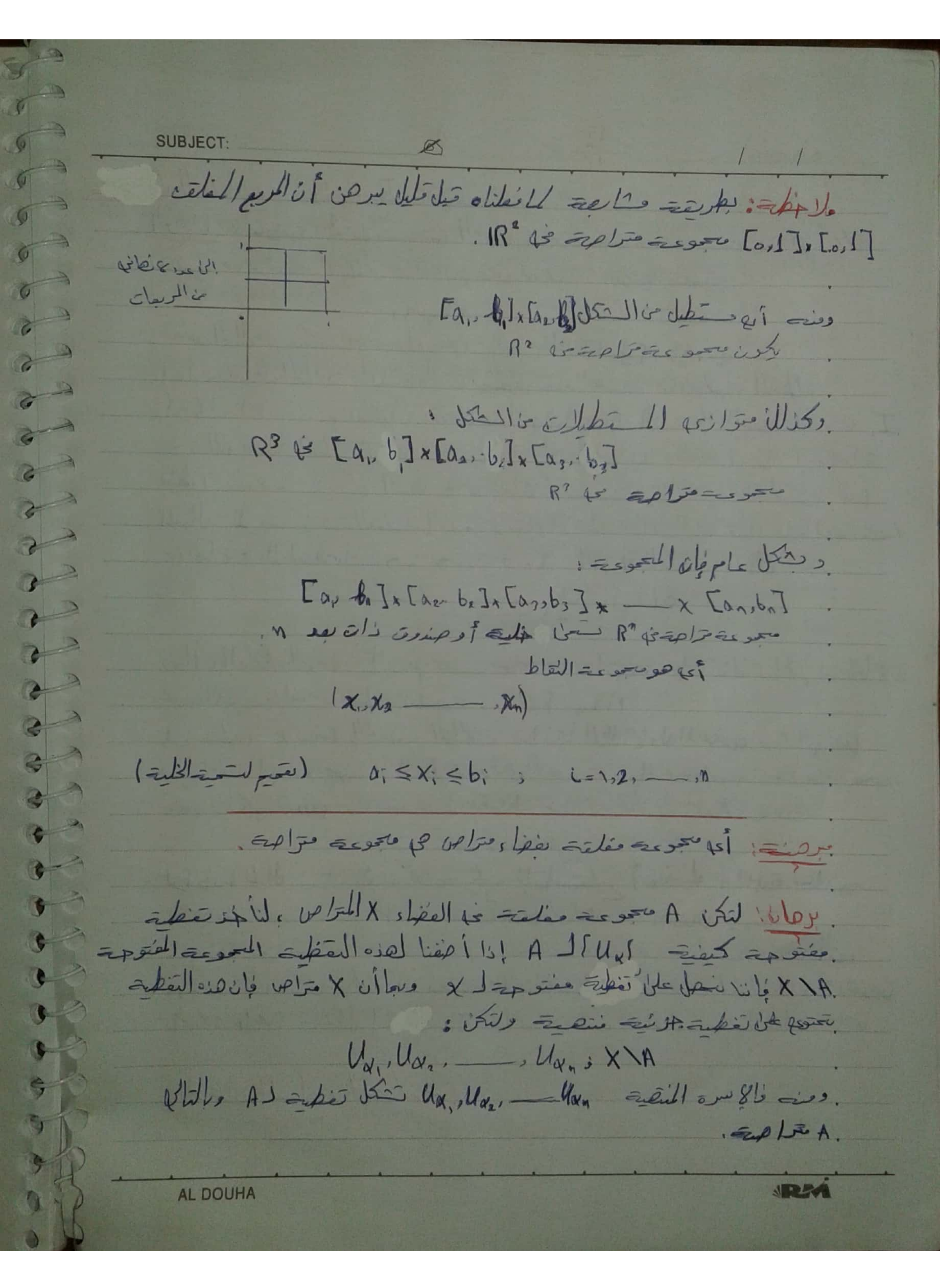
$$\delta(I_n)=\frac{1}{2^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

وبما أن الفضاء الجزئي I_0 تام حسب مبرهنة سابقة فإن نقطة تقاطع هذه المجالات غير خالية ومؤلفة من نقطة واحدة . $\bigcap I_n=\{x\}$
إن نقطة x تنتمي إلى جميع المجالات بما فيها المجال الأول الصفري وبالتالي فهي تقع ضمن إحدى مجموعات التغطية ولتكن المجموعة U_0 مفتوحة وبما أنها مفتوحة فهي بالتأكيد تحوي كرة مفتوحة مركزها x ونصف قطرها r ، r عدد منته

$$B(x,r)\subseteq U_0$$

لو أخذنا المجال I_n الذي طوله $\frac{1}{2^n}$ بإمكاننا نستطيع أن نجعل n كبيرة بما فيه الكفاية بحيث يصبح $\frac{1}{2^n}<r$ وهذا يؤدي إلى أن $I_n\subseteq B(x,r)$
أي I_n تغطيه مجموعة واحدة مفتوحة من عناصر التغطية في حين أنه حسب بناءه لا يغطى بعدد منته من عناصر التغطية وهذا تناقض إذاً الفرض الجدلي خاطئ والمجال $[0,1]=I_0$ متراص وبطبيعة الحال أي مجال مغلق متراص

البرهان السابق للمطالعة.



SUBJECT:

ملاحظة: بطريقة مشابهة لما فعلناه قبل قليل يبرهن أن المربع المغلق $[0,1]\times[0,1]$ مجموعة متراصة في $\mathbb{R}^2$.

ومنه أي مستطيل من الشكل $[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]$ يكون مجموعة متراصة من $\mathbb{R}^2$

وكذلك متوازي المستطيلات من الشكل:

$[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times[a_3, b_3]$ في $\mathbb{R}^3$

مجموعة متراصة في $\mathbb{R}^3$

وبشكل عام فإن المجموعة:

$[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times[a_3, b_3]\times \text{———} \times[a_n, b_n]$

مجموعة متراصة في $\mathbb{R}^n$ تسمى خلية أو صندوق ذات بعد n.

أي هو مجموعة النقاط

$(x_1, x_2 \text{———}, x_n)$

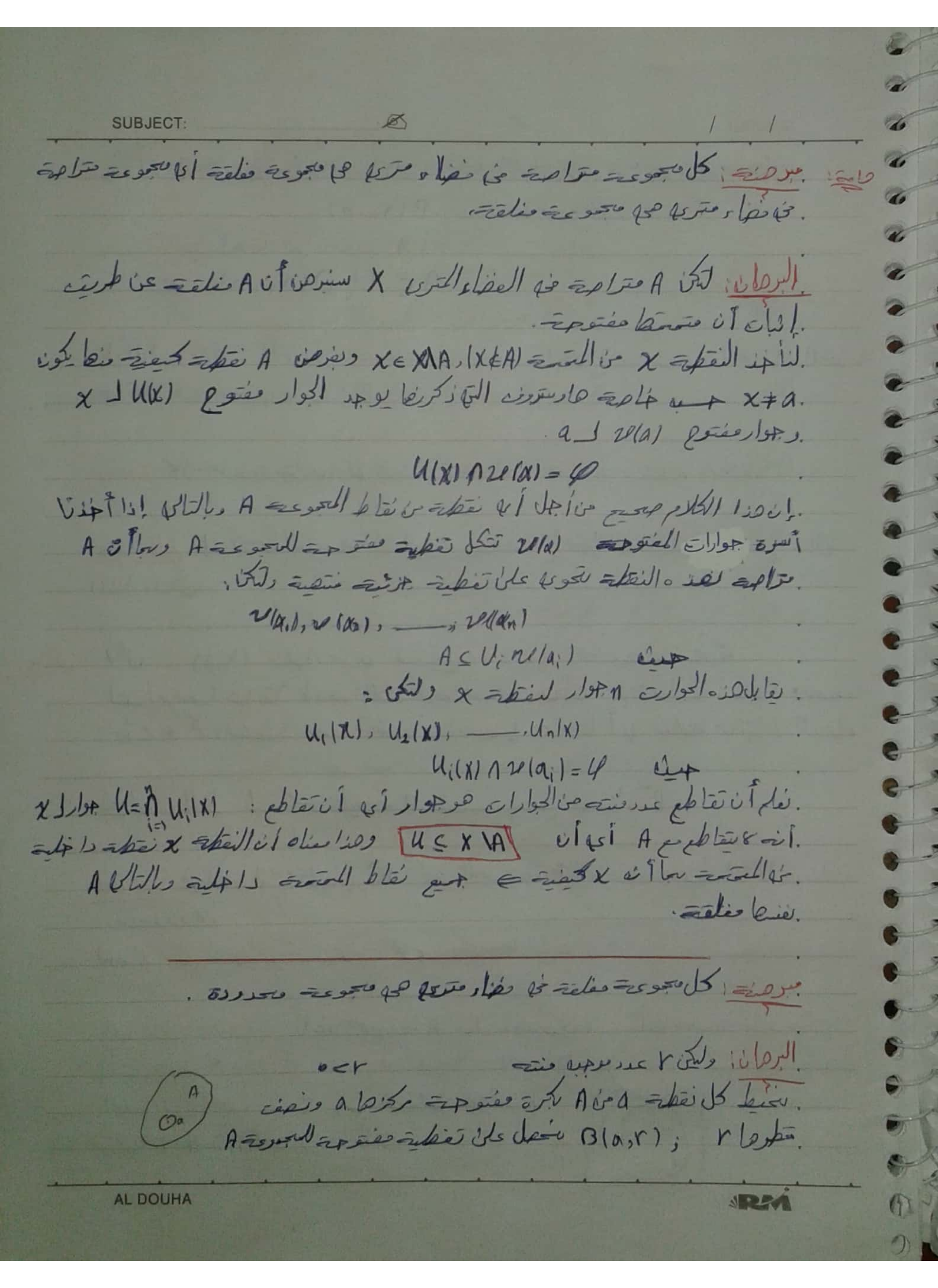
(تعميم لتسمية الخلية) $a_i \le x_i \le b_i \;;\; i = 1, 2, \text{———}, n$

مبرهنة: أي مجموعة مغلقة بفضاء متراص هي مجموعة متراصة.

برهان: لتكن A مجموعة مغلقة في الفضاء X المتراص، لنأخذ تغطية مفتوحة كيفية $\{U_\alpha\}$ لـ A إذا أضفنا لهذه التغطية المجموعة المفتوحة $X\setminus A$ فإننا نحصل على تغطية مفتوحة لـ X وبما أن X متراص فإن هذه التغطية تحتوي على تغطية جزئية منتهية ولتكن:

$U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \text{———}, U_{\alpha_n} ; X\setminus A$

ومنه فالأسرة المنتهية $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \text{———} U_{\alpha_n}$ تشكل تغطية لـ A وبالتالي A متراصة.



ملاحظة: **مبرهنة:** كل مجموعة متراصة في فضاء متري هي مجموعة مغلقة أي المجموعة متراصة في فضاء متري هي مجموعة مغلقة.

البرهان: لتكن A متراصة في الفضاء المتري X سنبرهن أن A مغلقة عن طريق إثبات أن متممها مفتوحة.

لنأخذ النقطة x من المتممة $(x \notin A)$، $x \in X \setminus A$ ولنفرض A نقطة كيفية منها يكون $x \neq a$. حسب خاصية هاوسدورف التي ذكرناها يوجد الجوار مفتوح $U(x)$ لـ x وجوار مفتوح $V(a)$ لـ a.

$$U(x) \cap V(a) = \varnothing$$

إن هذا الكلام صحيح من أجل أي نقطة من نقاط المجموعة A وبالتالي إذا أخذنا أسرة جوارات المفتوحة $V(a)$ تشكل تغطية مفتوحة للمجموعة A وبما أن A متراصة لهذه النقطة تحوي على تغطية جزئية منتهية ولتكن:

$$V(a_1), V(a_2), \ldots, V(a_n)$$

حيث $A \subseteq \bigcup_i V(a_i)$

يقابل هذه الجوارات n جوار للنقطة x ولتكن:

$$U_1(x), U_2(x), \ldots, U_n(x)$$

حيث $U_i(x) \cap V(a_i) = \varnothing$

نعلم أن تقاطع عدد منته من الجوارات هو جوار أي أن تقاطع: $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i(x)$ جوار لـ x أنه لا يتقاطع مع A أي أن $U \subseteq X \setminus A$ وهذا معناه أن النقطة x نقطة داخلية في المتممة بما أنه x كيفية $\Leftarrow$ جميع نقاط المتممة داخلية وبالتالي A نفسها مغلقة.

مبرهنة: كل مجموعة مغلقة في فضاء متري هي مجموعة محدودة.

البرهان: ولتكن r عدد موجب منته $0 < r$

نحيط كل نقطة a من A بكرة مفتوحة مركزها a ونصف قطرها r ; $B(a,r)$ نحصل على تغطية مفتوحة للمجموعة A

وبما أن A متراصة فإن هذه التغطية تحتوي على تغطية جزئية منتهية ولتكن:

$B(a_1,r), B(a_2,r), \ldots, B(a_n,r)$

حيث اجتماعهم يحوي A أي:

$$A \subseteq \bigcup_i B(a_i,r)$$

إن كل كرة من هذه الكرات مجموعة محدودة واجتماع عدد منته من المجموعات المحدودة هو مجموعة محدودة وهذا الاجتماع يحوي A إذاً A محدودة

نتيجة: كل مجموعة متراصة في الفضاء المتري هي مجموعة مغلقة ومحدودة.

ملاحظة: إن عكس النتيجة السابقة غير صحيح في الحالة العامة ويوضح ذلك المثال التالي:

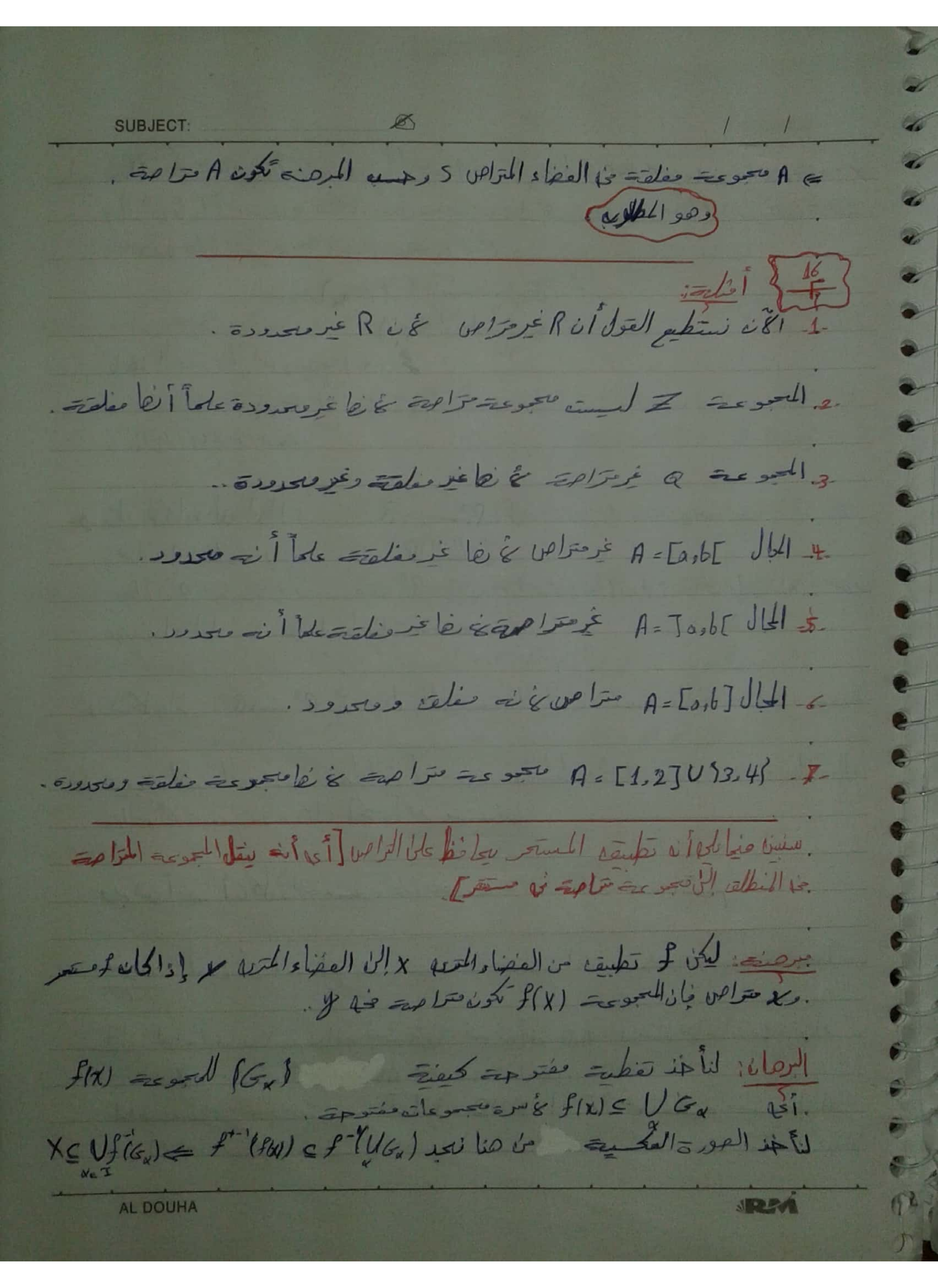
مثال: لتكن (X,d) فضاء متري متقطع حيث X مجموعة غير منتهية.
لقد أوضحنا سابقاً أن هذا المثال غير متراص من حيث أن X مجموعة مغلقة ومحدودة
في X كرة مغلقة نصف قطرها يساوي 1 ومركزها أي نقطة من نقاط الفضاء.

لكن لحسن الحظ: فإن عكس نتيجة السابقة صحيح في فضاء R^n

مبرهنة: في الفضاء الإقليدي R^n تكون المجموعة متراصة إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة.

البرهان: ($\Leftarrow$ لزوم الشرط): برهانه لقد نتج من النتيجة سابقة.

($\Rightarrow$ كفاية الشرط). نأخذ مجموعة A مغلقة ومحدودة بما أنها محدودة فإنه يمكن احتواؤها في كرة مغلقة نصف قطرها r ولتكن $A \subseteq \bar{B}(a,r)$ والكرة المغلقة هذه يمكن احتواؤها في صندوق S إذن A مغلقة في الفضاء وبالتالي $A \cap S = A$ مغلقة في S



⇐ A مجموعة مغلقة في الفضاء المتراص S وحسب المبرهنة تكون A متراصة.

(وهو المطلوب).

$\frac{16}{4}$ أمثلة:

1- الآن نستطيع القول أن R غير متراص لأن R غير محدودة.

2- المجموعة Z ليست مجموعة متراصة لأنها غير محدودة علماً أنها مغلقة.

3- المجموعة Q غير متراصة لأنها غير مغلقة وغير محدودة..

4- المجال $A=[a,b[$ غير متراص لأنها غير مغلقة علماً أنه محدود.

5- المجال $A=]a,b[$ غير متراصة لأنها غير مغلقة علماً أنه محدود.

6- المجال $A=[a,b]$ متراص لأنه مغلق ومحدود.

7- $A=[1,2]\cup\{3,4\}$ مجموعة متراصة لأنها مجموعة مغلقة ومحدودة.

سنبين فيما يلي أن تطبيق المستمر يحافظ على التراص [أي أنه ينقل المجموعة المتراصة في المنطلق إلى مجموعة متراصة في المستقر].

مبرهنة: ليكن f تطبيق من الفضاء المترية X إلى الفضاء المتري Y إذا كان f مستمر و X متراص فإن المجموعة $f(X)$ تكون متراصة في Y..

البرهان: لنأخذ تغطية مفتوحة كيفية $\{G_\alpha\}$ للمجموعة $f(X)$

أي $f(X)\subseteq\bigcup_\alpha G_\alpha$ لأسرة مجموعات مفتوحة.

لنأخذ الصورة العكسية من هنا نجد $f^{-1}(f(X))\subseteq f^{-1}(\bigcup_\alpha G_\alpha)$ ⇐ $X\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}f^{-1}(G_\alpha)$